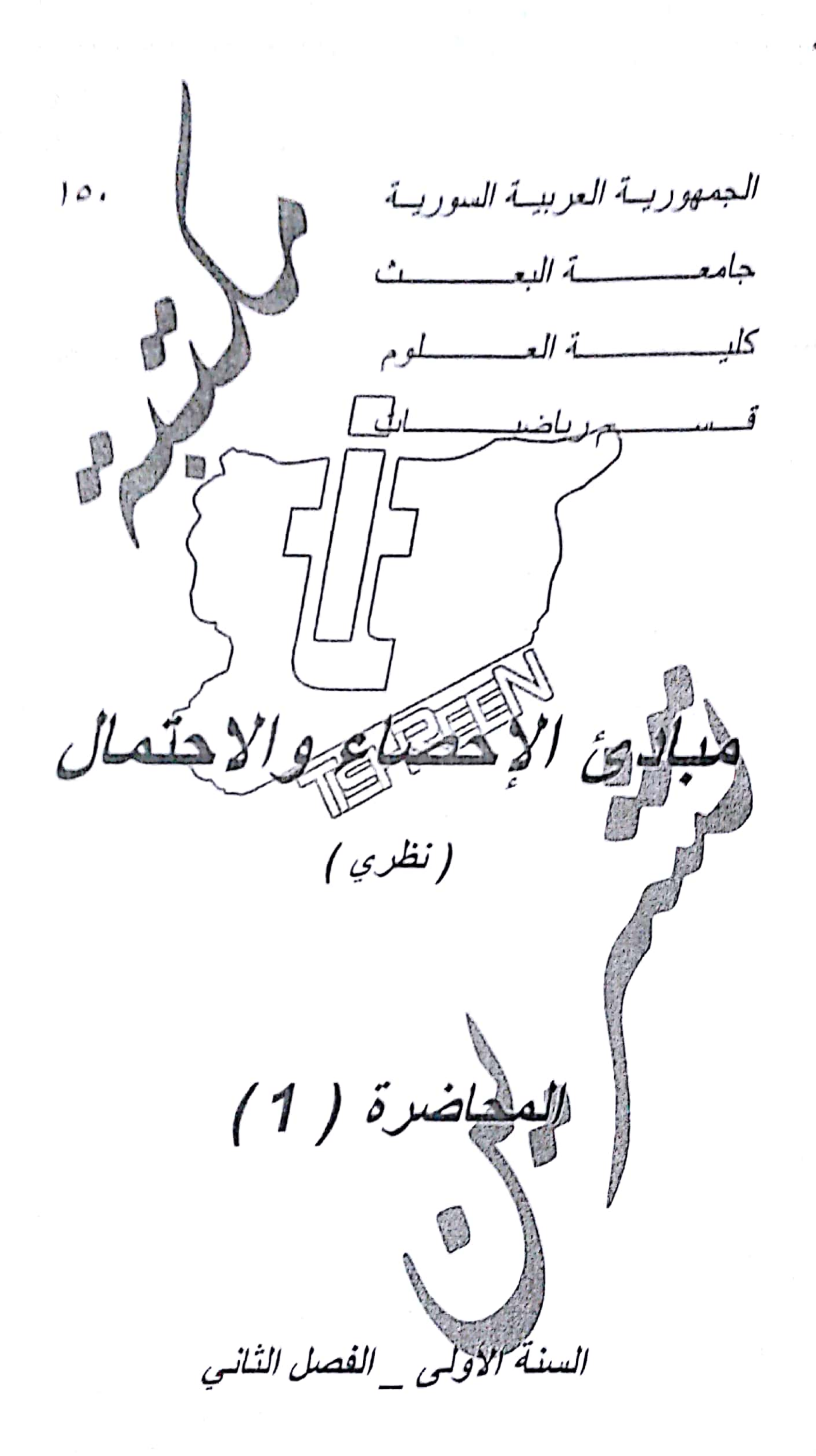


١٥٠

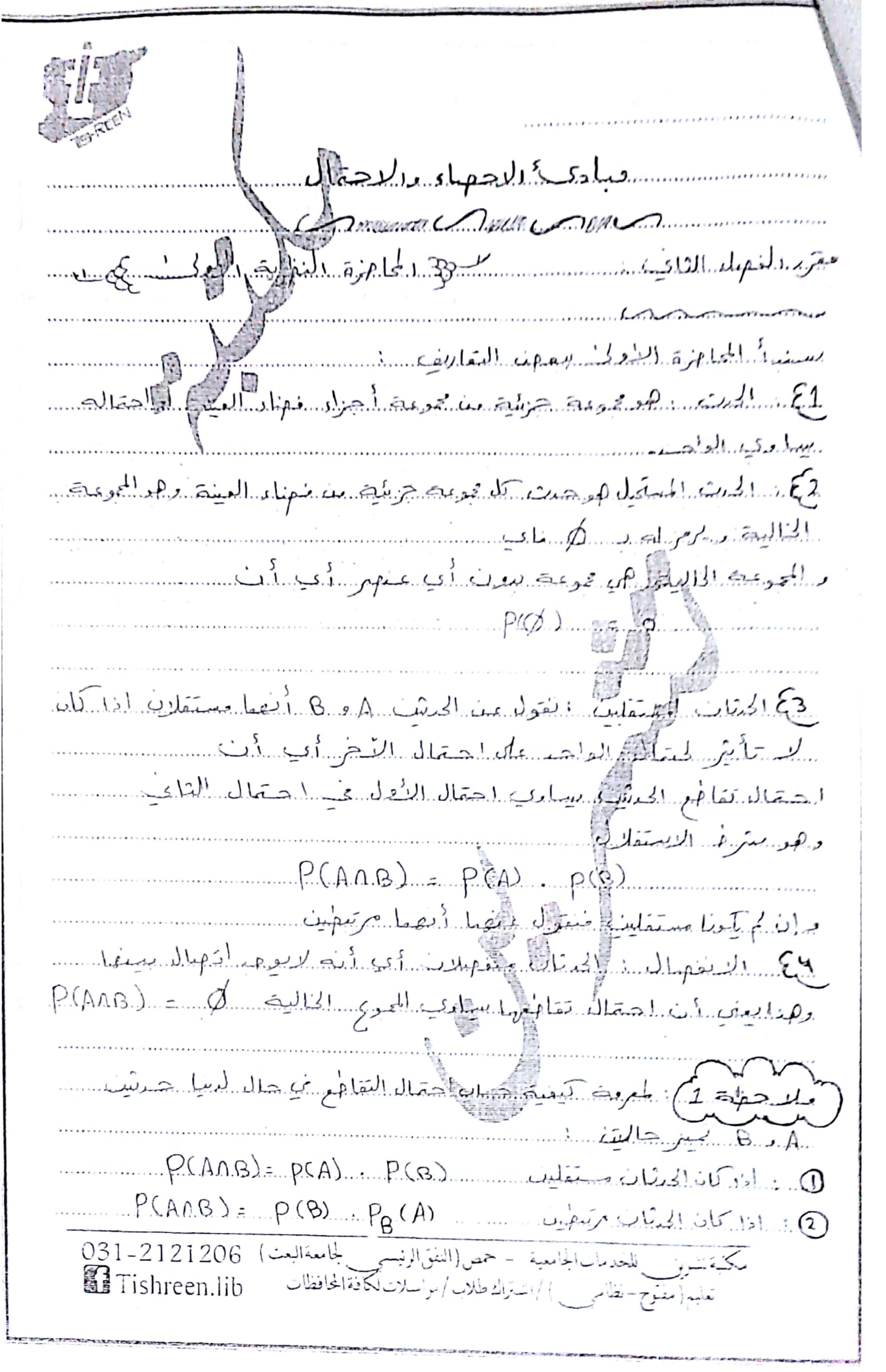
الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم
قسم رياضيات

مبادئ الإحصاء والاحتمال

(نظري)

المحاضرة (1)

السنة الأولى _ الفصل الثاني



مبادئ الاحصاء والاحتمال

مقرر الفصل الثاني : المحاضرة النظرية الأولى

سنبدأ المحاضرة الأولى ببعض التعاريف :

1) الحدث : هو مجموعة جزئية من مجموعة أجزاء فضاء العينة واحتماله يساوي الواحد

2) الحدث المستحيل هو حدث كل مجموعة جزئية من فضاء العينة وهو المجموعة الخالية ويرمز له بـ $\emptyset$ أي

والمجموعة الخالية هي مجموعة بدون أي عنصر أي أن

$P(\emptyset) = 0$

3) الحدثان المستقلين : نقول عن الحدثين A و B أنهما مستقلان اذا كان لا تأثير لاحتمال الواحد على احتمال الآخر أي أن احتمال تقاطع الحدثين يساوي احتمال الأول في احتمال الثاني وهو شرط الاستقلال

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

وإن لم يكونا مستقلين فنقول عنهما أنهما مرتبطين

4) الانفصال : الحدثان منفصلان أي أنه لا يوجد اتصال بينهما وهذا يعني أن احتمال تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية $P(A \cap B) = \emptyset$

ملاحظة 1 : لمعرفة كيفية حساب احتمال التقاطع في حال لدينا حدثين A و B نميز حالتين :

① : اذا كان الحدثان مستقلين : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

② : اذا كان الحدثان مرتبطين : $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

في $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

مع العلم بأن $P(A \backslash B)$ هو الاحتمال الشرطي الذي يعرف بشكل منه أيضاً ويرمز له أيضاً $P_B(A)$

إذاً القانون الثاني هو القانون العام لاحتمال التقاطع في حال عدم معرفتنا هل الحدثان مستقلان أم مرتبطان؟

ملاحظة 2 : تتعلق بالعمليات على الأحداث

① $A \cup B$: رمز $\cup$ يعني اجتماع : وهو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A أو B وبالموازنة $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

② $A \cap B$: رمز $\cap$ يعني تقاطع وهو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A و B معاً

③ $\bar{A}$: هو الحدث المتمم لـ A وهو مجموعة النتائج الموجودة في فضاء العينة بغير الموجودة في A

مثال عن الملاحظة الأولى :

ليكن لدينا $P(B) = 0,3$ و $P(A) = 0,4$

ولدينا أيضاً احتمال A علماً أن B قد وقع وهو الاحتمال الشرطي ونرمز له $P_B(A) = 0,7$ أو نرمز له $P(A \backslash B) = 0,7$

احتمال B علماً أن A قد وقع $P_A(B) = 0,2$

والمطلوب : احسب احتمال التقاطع في حال كان الحدثان مستقلان أو مرتبطين؟

الحل : إذا كان الحدثان مستقلان

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = (0,3) \cdot (0,4) = 0,12$

أما اذا كان الحدثان مرتبطين

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

$= (0,3) \cdot (0,7) = 0,21$

$P(B \cap A) = P(A) \cdot P_A(B)$

$= (0,4) \cdot (0,2) = 0,8$

نستنتج من ذلك أن الاحتمال الشرطي هو الاحتمال الأهم. أما هو الاحتمال الشرطي ؟

الاحتمال الشرطي :

ويرمز له بالرمز $P_B(A)$ ويقرأ احتمال A علماً أن B متوقع والحدث الشرطي هو الحدث A بشرط وقوع الحدث غير المستحيل B أي أن $(P(B) \neq 0)$ ويعطى بالقانون

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B)$ ← احتمال التقاطع

$P(B)$ ← احتمال الحدث الواقع

احتمال A علماً أن B متوقع

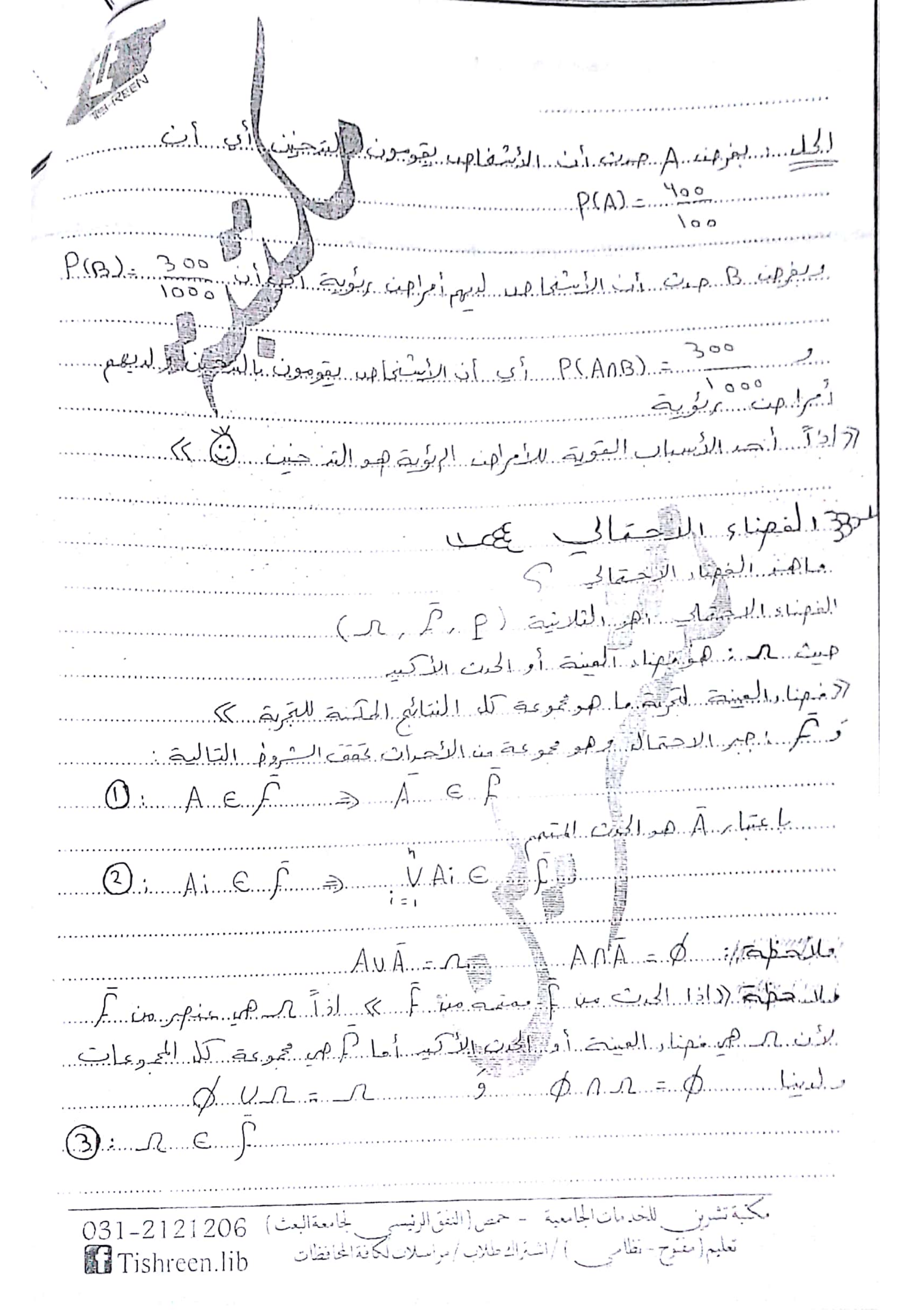
$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

احتمال B علماً أن A متوقع

مثال على ذلك :

اذا كان لدينا 1000 شخص ولدينا منهم 400 شخص يقومون بالتدخين و 300 شخص لديهم أمراض الرئوية و 300 شخص يقومون بالتدخين ولديهم أمراض رئوية :

السؤال : هل التدخين له علاقة بالأمراض الرئوية ؟



الحل : نفرض A حدث أن الأشخاص يقومون بالتدخين أي أن

$P(A) = \frac{400}{100}$

ونفرض B حدث أن الأشخاص لديهم أمراض رئوية أي أن $P(B) = \frac{300}{1000}$

و $P(A \cap B) = \frac{300}{1000}$ أي أن الأشخاص يقومون بالتدخين و لديهم أمراض رئوية

« إذاً أحد الأسباب القوية للأمراض الرئوية هو التدخين »

الفضاء الاحتمالي

ما هو الفضاء الاحتمالي ؟

الفضاء الاحتمالي هو الثلاثية $(\Omega, \bar{F}, P)$

حيث Ω : هو فضاء العينة أو الحدث الأكيد

« فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة »

و $\bar{F}$: جبر الاحتمال وهو مجموعة من الأحداث تحقق الشروط التالية :

① : $A \in \bar{F} \Rightarrow \bar{A} \in \bar{F}$

باعتبار $\bar{A}$ هو الحدث المتمم

② : $A_i \in \bar{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \bar{F}$

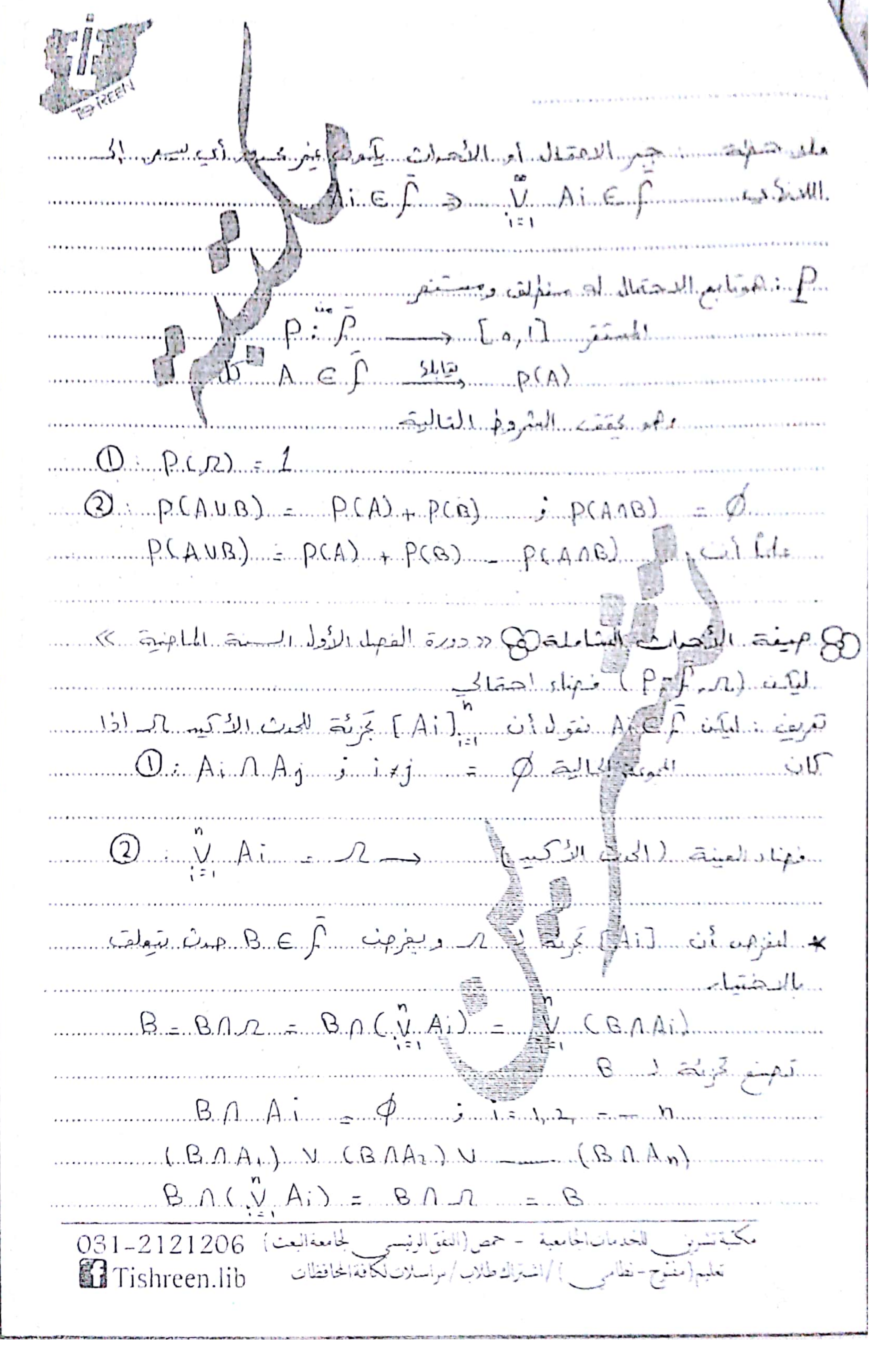
ملاحظة : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ، $A \cup \bar{A} = \Omega$

ملاحظة « إذا الحدث من $\bar{F}$ متممه منه $\bar{F}$ » إذاً Ω هي عنصر من $\bar{F}$

لأن Ω هي فضاء العينة أو الحدث الأكيد أما $\bar{F}$ هي مجموعة كل المجموعات

ولدينا $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ و $\emptyset \cup \Omega = \Omega$

③ : $\Omega \in \bar{F}$



ملاحظة: جبر الاحتمال او الأحداث يكون غير منتهي أي يسعى الى اللانهاية

$A_i \in \bar{f} \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i \in \bar{f}$

P : هو تابع الاحتمال له منطلق ومستقر

$P : \bar{f} \longrightarrow [0,1]$ المستقر

كل $A \in \bar{f}$ يقابله $P(A)$

وهو يحقق الشروط التالية

① : $P(\Omega) = 1$

② : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; $P(A \cap B) = \emptyset$

علماً أن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

صيغة الأحداث الشاملة «دورة الفصل الأول السنة الماضية»

ليكن $(\Omega, \bar{f}, P)$ فضاء احتمالي

تعريف: ليكن $A_i \in \bar{f}$ نقول أن $[A_i]_{i=1}^{n}$ تجزئة للحدث الأكيد Ω اذا كان الشروط التالية

① : $A_i \cap A_j = \emptyset$; $i \neq j$

② : $\bigvee_{i=1}^{n} A_i = \Omega \longrightarrow$ فضاء العينة (الحدث الأكيد)

* لنفرض أن $[A_i]$ تجزئة لـ Ω وليفرض $B \in \bar{f}$ حدث يتعلق بالاختبار

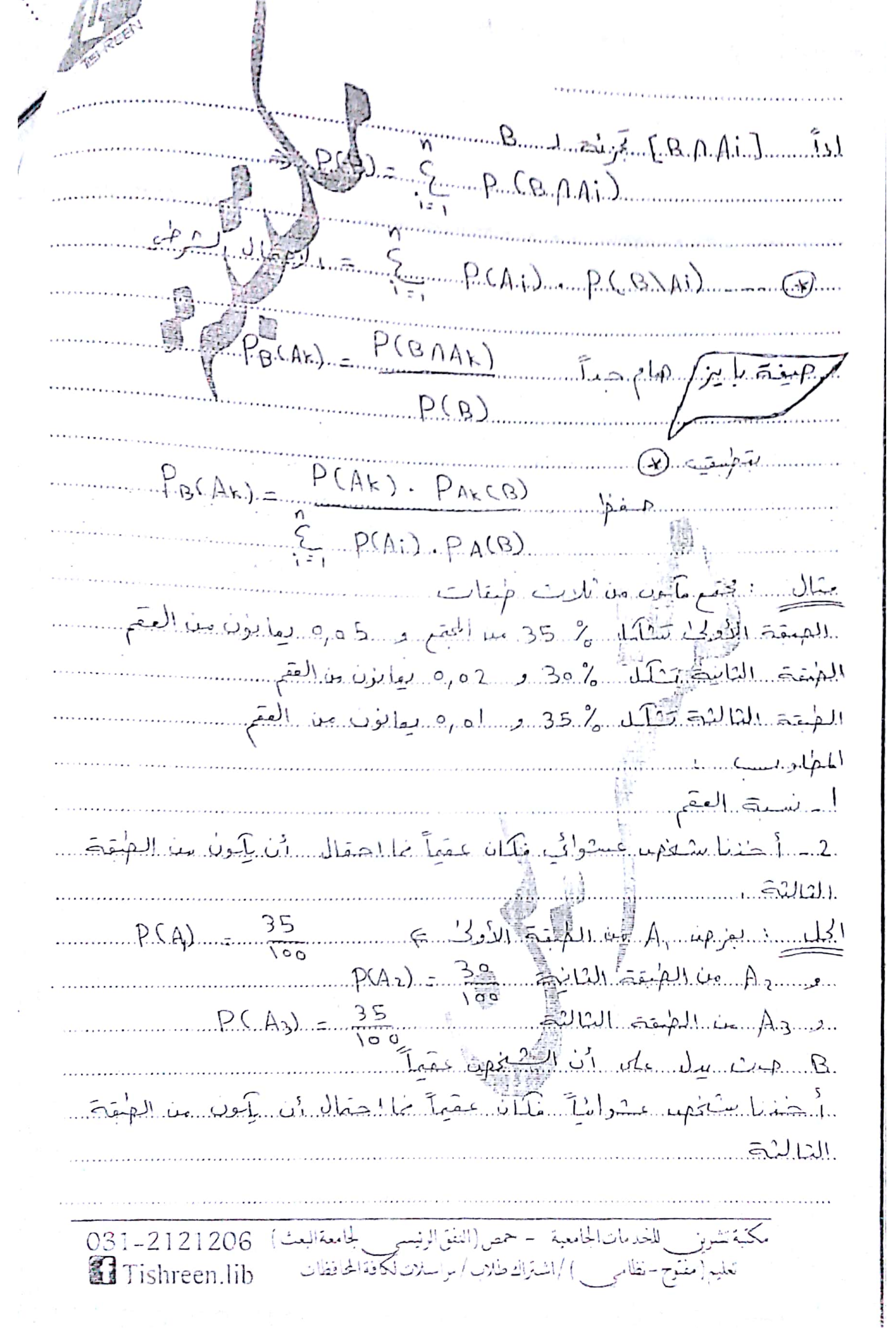
$B = B \cap \Omega = B \cap (\bigvee_{i=1}^{n} A_i) = \bigvee_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$

تشكل تجزئة لـ B

$B \cap A_i = \emptyset$; $i = 1, 2, \dots, n$

$(B \cap A_1) \vee (B \cap A_2) \vee \dots (B \cap A_n)$

$B \cap (\bigvee_{i=1}^{n} A_i) = B \cap \Omega = B$



إذاً $[B\cap A_i]$ تجزئة لـ B

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)$$

الاحتمال الشرطي

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B\backslash A_i) \quad \dots (*)$$

صيغة بايز هام جداً

$$P_B(A_k) = \frac{P(B\cap A_k)}{P(B)}$$

بتطبيق (*)

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)\cdot P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P_A(B)}$$

مثال: مجتمع مكون من ثلاث طبقات

الطبقة الأولى تشكل 35 % من المجتمع و 0,05 يعانون من العقم

الطبقة الثانية تشكل 30 % و 0,02 يعانون من العقم

الطبقة الثالثة تشكل 35 % و 0,01 يعانون من العقم

المطلوب:

1. نسبة العقم

2. أخذنا شخص عشوائي فكان عقيماً ما احتمال أن يكون من الطبقة الثالثة.

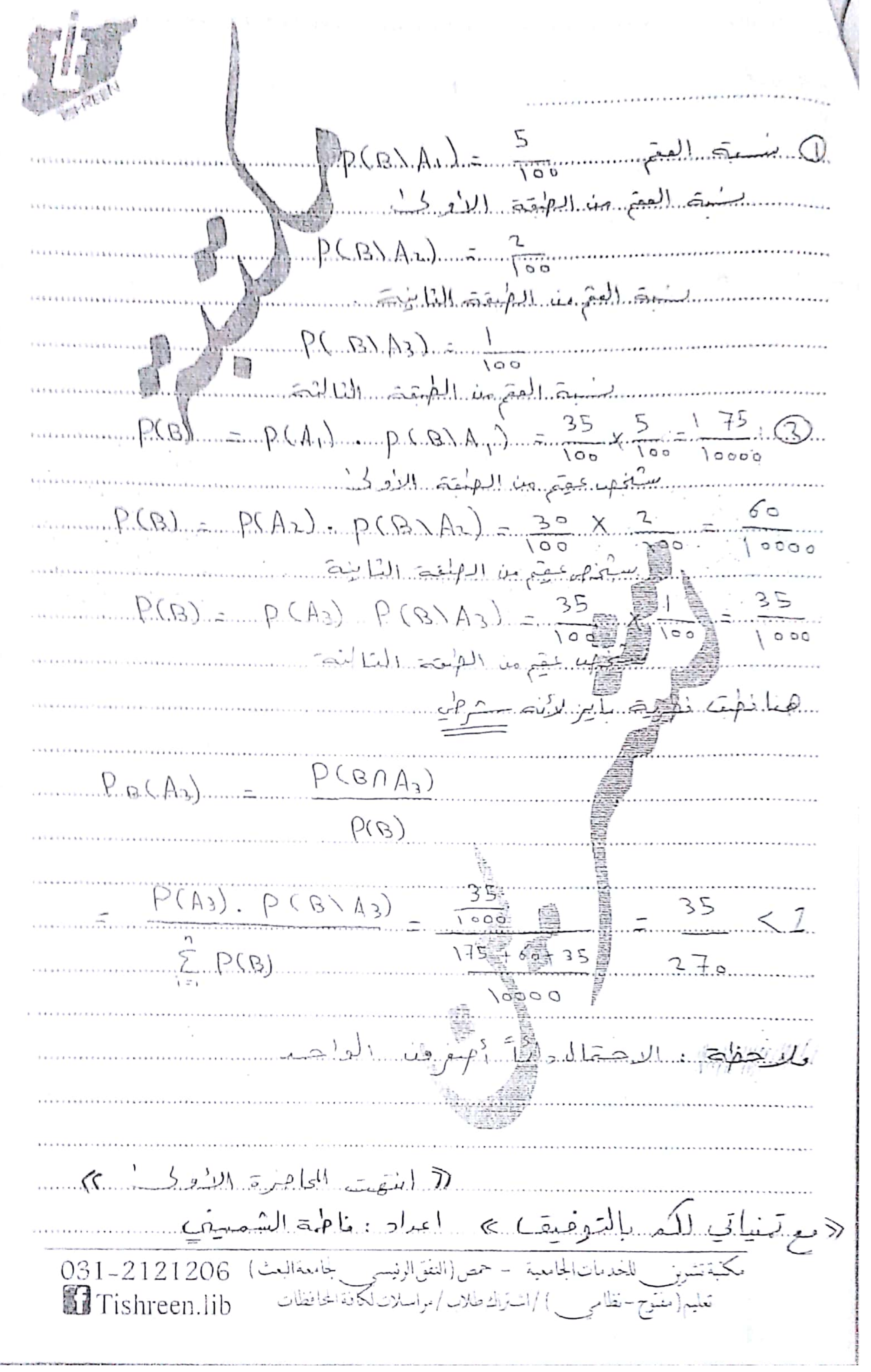
الحل: نرمز بـ A_1 من الطبقة الأولى ← $P(A_1) = \frac{35}{100}$

و A_2 من الطبقة الثانية $P(A_2) = \frac{30}{100}$

و A_3 من الطبقة الثالثة $P(A_3) = \frac{35}{100}$

B حدث يدل على أن الشخص عقيماً

أخذنا شخص عشوائياً فكان عقيماً ما احتمال أن يكون من الطبقة الثالثة



① نسبة العقم $P(B \backslash A_1) = \frac{5}{100}$

نسبة العقم من الطبقة الأولى

$P(B \backslash A_2) = \frac{2}{100}$

نسبة العقم من الطبقة الثانية

$P(B \backslash A_3) = \frac{1}{100}$

نسبة العقم من الطبقة الثالثة

③ $P(B) = P(A_1) \cdot P(B \backslash A_1) = \frac{35}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{175}{10000}$

سنختار عقيم من الطبقة الأولى

$P(B) = P(A_2) \cdot P(B \backslash A_2) = \frac{30}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{60}{10000}$

سنختار عقيم من الطبقة الثانية

$P(B) = P(A_3)\ P(B \backslash A_3) = \frac{35}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{35}{1000}$

نختار عقيم من الطبقة الثالثة

هنا نطبق نظرية بايز لأنه شرطي

$$P_B(A_3) = \frac{P(B \cap A_3)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_3) \cdot P(B \backslash A_3)}{\sum_{i=1}^{n} P(B)} = \frac{\frac{35}{1000}}{\frac{175+60+35}{10000}} = \frac{35}{270} < 1$$

ملاحظة: الاحتمال دائماً أصغر من الواحد

« انتهت المحاضرة الأولى »

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق » اعداد: فاطمة الشمسي